Motormodellierung/Theorie

Elektromotorische Konstante k_e

Sie hat die Einheit [Nm/A] = [Vs] und beschreibt zwei fundamentale Eigenschaften des Motors:

1. Wenn durch den Motor ein *Strom* fließt, entsteht ein *Drehmoment*. Für einen Strom I [A] hat dieses die Größe

$$M_i = k_e \cdot I \qquad [\mathrm{Nm}] \qquad (1)$$

Das erzeugte Drehmoment ist proportional dem Strom. Der Index i soll anzeigen, daß es sich um das sog. "innere" Moment handelt, von dem noch ein *Verlustmoment* (s.u.) abgezogen werden muß. Erst das so bereinigte Drehmoment steht am Abtrieb zur Verfügung.

2. Wenn der Motor dreht, entsteht in seinen Wicklungen eine elektr. Spannung. Diese wird *Generator*- oder *Gegenspannung* genannt. Die im Motor bei einer bestimmten Drehzahl n [Upm] erzeugte Gegenspannung beträgt

$$U_G = k_e \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad [\mathrm{V}] \qquad (2)$$

Die Gegenspannung ist proportional der Drehzahl und der angelegten Betriebsspannung entgegengesetzt. Der Faktor π/30 rührt davon her, daß wir hier die Drehzahl n in [U/min] und nicht in [rad/s] angeben.

Verlustmoment M_V

Ein Teil des im Motor erzeugten Drehmoments wird benötigt, um "innere Hemmnisse" im Motor zu überwinden. Dies sind z.B. die Lagerreibung, die Reibung zwischen Bürsten und Kollektor, Ventilation (Luftreibung/Kühlung), Ummagnetisierung des Eisens im Motor (Hysterese), und Wirbelströme in den Eisen- und Magnetmassen und in den Wicklungen.

Der Verlustmomentanteil durch mechanische Reibung ist näherungsweise konstant; der zugehörige Verlustleistungsanteil steigt damit linear mit der Drehzahl an.
Der Verlustmomentanteil durch Ventilation wächst wie alle Strömungskräfte quadratisch mit der Drehzahl, die zugehörige Verlustleistung daher mit n^3.
Das bremsende Moment aus Hystereseeffekten ist konstant; die zugehörige Verlustleistung wächst linear linear mit der Drehzahl.
Bremsmomente aus Wirbelströmen wachsen linear mit der Drehzahl, die Verlustleistung dazu dann mit n^2.
Da auch Wirbeströme aus Harmonischen der Drehzahl auftreten, können noch höhere Potenzen in n auftreten.

Man könnte daher das gesamte Verlustmoment bzw. die Verlustleistung als Polynom in der Drehzahl n ansetzen. In der Literatur findet man in der Regel jedoch nur die Annahme eines mittleren, konstanten Verlustmoments. Insbesondere bei Bürstenmotoren ist dies wegen der hohen mechanischen Reibung und der relativ niederen Drehzahlen plausibel. Bei BL-Motoren ist die mechanische Reibung wegen der fehlenden Bürsten und der normalerweise hochwertigen Lagerung so gering, daß sie oft vernachlässigt werden kann. Die Erfahrung hat gezeigt, daß es für mittlere Ansprüche an die Genauigkeit der Rechnung darüberhinaus genügt, nur mit dem linearen Term des Polynoms zu rechnen, d.h. ein linear mit der Drehzahl wachsendes Verlustmoment anzunehmen. Für die Praxis hat dies den großen Vorteil, daß zur Berücksichtigung aller nicht-ohm´schen Verluste nur ein weiterer Parameter notwendig und zu bestimmen ist.

Das Verlustmoment soll daher nachfolgend durch einen Faktor k_L [Nm*s] repräsentiert werden:

$$\mathrm{M_V} = k_L \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad (3)$$

Anschlußwiderstand R
Dies ist der Widerstand, den man an den Klemmen des Motors mit einem geeigneten Meßgerät messen könnte. In Wirklichkeit gibt es dabei gewisse praktische Probleme, und man kann R meistens nur indirekt bestimmen; das soll hier aber nicht weiter stören.

Der Widerstand besteht aus mehreren Anteilen. In erster Linie rührt er von der Wicklung her. Beim Bürsten-Motor kommen der Widerstand der Bürsten, der Übergangswiderstand Bürsten/Kollektor usw. dazu. Beim bürstenlosen (BL-) Motor entfallen die mit den Bürsten zusammenhängenden Anteile. Beim BL-Motor ist ein "Controller" oder "Steller" notwendiger Teil des Motors. Wenn man den Anschlußwiderstand an den Klemmen des Controllers definiert bzw. misst, dann ist zwangsläufig dieser Widerstandsanteil enthalten.

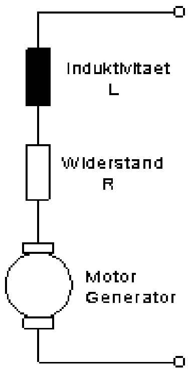
Der Widerstand R ist nur näherungsweise konstant. Vor allem ist er erheblich von der Temperatur abhängig. Beim BL-Motor kommen noch Widerstandsanteile im Controller hinzu, ferner hängt sein Wert von der Schaltungsart der Stränge (Dreieck, Stern) ab.

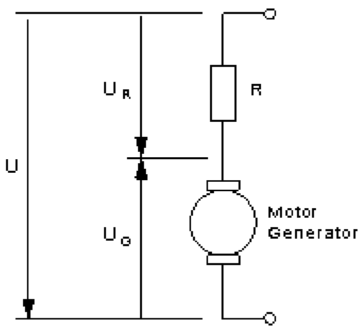
Der Anschlußwiderstand ist stets größer als der reine ohm´sche Widerstand der Motor-Wicklung. Als Erfahrungswert bei BL-Motoren kann man annehmen, daß der Anschlußwert durchschnittlich etwa das 1,5-fache des reinen Wicklungswiderstands aufweist. Es kommen jedoch auch Werte ab etwa 1,2 bis zu 1,8 vor.

Wird R empirisch bestimmt, dann stellt der gefundene Wert den gesamten Anschlußwiderstand dar. Es wird im Folgenden angenommen, daß dieses R hinreichend konstant ist.

Mit Hilfe der 3 Parameter k_e, R, k_L läßt sich das Betriebsverhalten des Motors beschreiben.

Ersatzschaltbild des Motors
Der Motor wird gedanklich ersetzt durch eine Reihenschaltung von Widerstand, Induktivität und Generator.





Die (Wicklungs-) Induktivität können wir im Folgenden übergehen, obwohl sie bei der "getakteten" Ansteuerung sowie in den Details der Kommutierung von BL-Motoren eine sehr große Rolle spielt. Es soll eine nicht getaktete Betriebsspannung, d.h. Vollast-Betrieb angenommen werden. In diesem Fall kann man die Induktivität unberücksichtigt lassen.

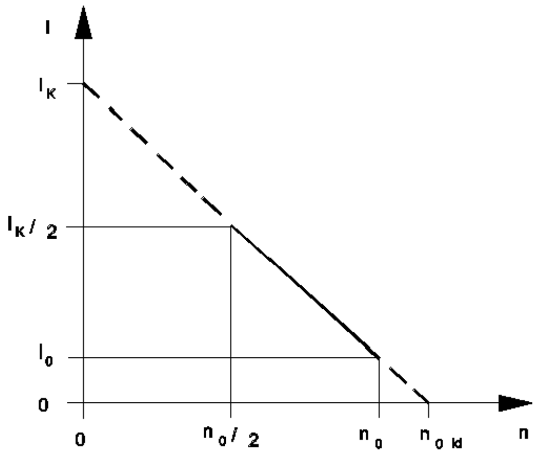
Diagramm Strom vs Drehzahl, I(n)
Die vom Generator erzeugte Gegenspannung nach Gl. (2) ist der angelegten Betriebsspannung entgegengesetzt gerichtet. Am Widerstand R liegt daher die Differenz der beiden Spannungen

$$U_R = U - U_G = U - k_e \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \quad [\mathrm{V}] \qquad (4)$$

Nach dem Ohm´schen Gesetz treibt dann U_R durch den Widerstand R einen Strom

$$I = \frac{U - k_e \cdot n \cdot \pi / 30}{R} = \frac{U}{R} - \frac{k_e}{R} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \quad [\mathrm{A}] \qquad (5)$$

Diese Beziehung wird als die sog*. Hauptgleichung des DC-Motors* bezeichnet.



Im Diagramm mit den Achsen n und I stellt sie eine Gerade dar, die für n = 0 mit dem Wert I_K beginnt und mit wachsender Drehzahl n mit der Steigung k_e/R abfällt.

I_K ist der sog. Kurzschluß- oder Anlaufstrom. Er hat den Wert

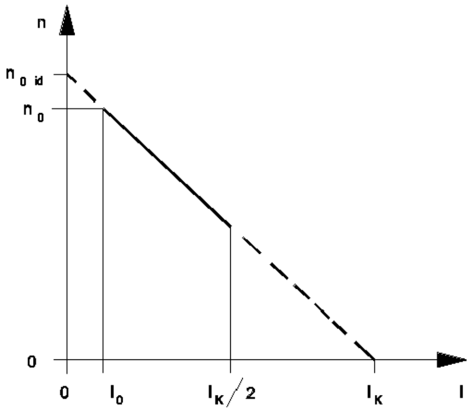
$$I_K = \frac{U}{R} \qquad [A] \qquad (6)$$

Für die Praxis ist nur der Kurvenbereich zwischen $n_0/2$ und n_0 von Bedeutung. I_K ist ein reiner "Rechenwert", den man (bei unseren Antriebsmotoren) in der Praxis nur in Sonderfällen erreichen kann und will. Er ist fast immer so groß, daß ihn Stromquellen, Steller usw. nicht bereitstellen können. Könnten sie es, dann würde der Motor in den meisten Fällen abbrennen.

Diagramm Drehzahl vs Strom, n(I)

Es ist die Umkehrung des obigen Diagramms (Vertauschung der Achsen). Formelmäßig muß man dazu nur die Gl. (5) nach n auflösen:

$$n = \frac{R}{k_e} \cdot \frac{30}{\pi} \cdot \left(\frac{U}{R} - I\right) \qquad [Upm] \qquad (7)$$



Auch hier ist natürlich wieder nur der Bereich zwischen I_0 und $I_k/2$ von praktischem Interesse.

Diagramme Drehmoment - Drehzahl, M(n) und n(M)

Wie weiter oben schon gesagt, ist das erzeugte innere Drehmoment proportional dem durch den Motor. fließenden Strom. Das an der Welle des Motors verfügbare Drehmoment ergibt sich aus dem inneren Moment M_i, vermindert um das Verlustmoment,

$$M = M_i - M_V \tag{8}$$

Mit Gl. (1), (3) und (5) ergibt sich daraus

$$M = k_e \cdot I - k_L \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad \text{[Nm]} \tag{9}$$

oder

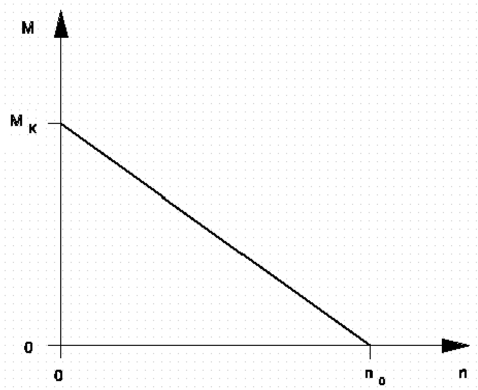
$$M = k_e \cdot \frac{U}{R} - \left(\frac{k_e^2}{R} + k_L \right) \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad \text{[Nm]} \tag{10}$$

Hierin ist

$$k_e \cdot \frac{U}{R} = k_e \cdot I_K = M_K \qquad \text{[Nm]} \tag{11}$$

das sog. *Kurzschluß*- oder *Anlaufmoment*, und der Klammerausdruck$\cdot\pi/30$ ist die Steigung, mit der sich das abgegebene Drehmoment bei steigender Drehzahl verringert.

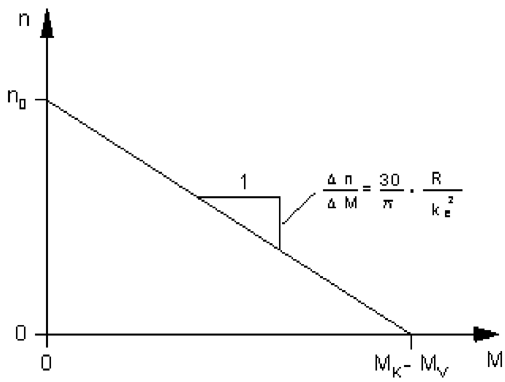
In einem Diagramm mit den Achsen n und M stellt Gleichung (10) eine Gerade dar, die für n = 0 bei $M = M_K$ beginnt und mit wachsender Drehzahl mit der Steigung $-(k_e^2/R+k_L)\cdot\pi/30$ abfällt. Für $n = n_0$ erreicht sie gerade die n-Achse, M = 0.



In Gl. (10) erscheint ein wichtiger Kennwert des Motors, nämlich die Größe

$$\frac{\pi}{30} \cdot \left(\frac{k_e^2}{R} + k_L \right) = \frac{\Delta M}{\Delta n} \qquad \left[\frac{(\mathrm{N\,m})^2}{\mathrm{W}} \right] \tag{12}$$

Hierin dominiert k_e^2/R gegenüber k_L bei weitem. Die Bedeutung von k_e^2/R wird vor allem deutlich, wenn in dem Diagramm die beiden Achsen vertauscht werden (dies ist dann übrigens die in der Elektrotechnik übliche Diagrammform):



Hier haben wir jetzt den Kehrwert als Steigung, nämlich Δn/ΔM. Das ist ein Maß für die "Steifigkeit", die der Motor einer Laständerung entgegegensetzt, d.h. die Drehzahländerung pro Drehmomentänderung.

$$s = \frac{\Delta n}{\Delta M} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{R}{k_e^2} \qquad \left[\frac{\mathrm{Upm}}{\mathrm{Nm}}\right] \tag{13}$$

Je kleiner der Wert von Δn/ΔM, desto flacher verläuft die Gerade, und desto geringer fällt die Drehzahländerung aus, wenn z.B. die Propellersteigung erhöht wird, oder wenn das Modell vom Horizontal- in den Steigflug übergeht. Da R und k_e motorspezifische Konstanten sind, ist auch s wieder eine Konstante. Dieser Wert sollte möglichst klein sein, d.h. der Motor-Konstrukteur muß R möglichst klein machen, und k_e möglichst groß, oder beides.

Das ist allerdings leichter gesagt als getan, da man die beiden Werte nicht beliebig voneinander wählen kann. Macht man z.B. R kleiner (weniger Windungen, dickerer Draht), dann wird automatisch k_e kleiner (hier zählt u.a. die Windungszahl), und die Leerlaufdrehzahl bzw. das ganze Drehzahlniveau des Motors steigt an. Zu lösen ist dieses Problem z.B. durch ein hochwertiges Magnetsystem des Motors, mit dem k_e groß gemacht werden kann, ohne daß R mitwächst, oder das sogar noch eine Verkleinerung von R ermöglicht. R/K_e^2 wird manchmal auch als "Lastregulierungs-Konstante" oder kurz "Lastregulierung" oder auch "Motor-Regulierung" bezeichnet.

Diagramm Drehmoment vs Strom, M(I)

Weiter oben wurde schon gesagt, daß sich das abgegebene Drehmoment aus der Differenz von innerem Moment und Verlustmoment ergibt, Gl. (8). Mit Gl. (9) und (7) wird dann

$$M = k_e \cdot I - U \cdot \frac{k_L}{k_e} + R \cdot \frac{k_L}{k_e} \cdot I \tag{14}$$

oder

$$M = \left(k_e + R \cdot \frac{k_L}{k_e} \right) \cdot I - U \cdot \frac{k_L}{k_e} \tag{15}$$

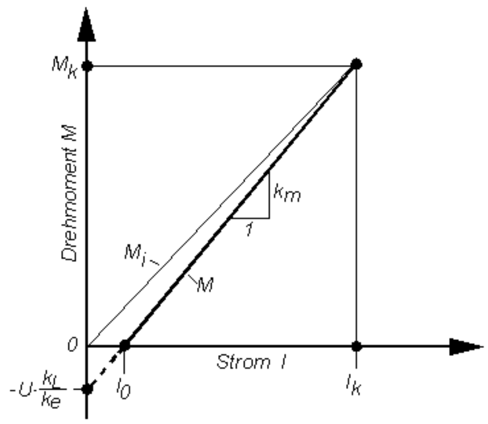
Mit der an dieser Stelle eingeführten Konstante

$$k_m = k_e + R \cdot \frac{k_L}{k_e} = \frac{k_e^2 + R \cdot k_L}{k_e} \tag{16}$$

ist dann

$$M = k_m \cdot I - U \cdot \frac{k_L}{k_e} \tag{17}$$

Diese Beziehung stellt in einem Diagramm M(I) eine Gerade dar mit der Steigung k_m und dem M-Achsen-abschnitt $-U_* k_L/k_e$.



Den Wert k_m kann man in Anlehnung an k_e („innere“ Drehmomentkonstante) als „äußere“ Drehmomentkonstante bezeichnen. Zunächst erscheint es unplausibel, daß k_m als „verlustbehaftete“ Konstante nach Gl. (16) einen größeren Wert besitzt als die ideale Konstante k_e. Die Erklärung dafür ist im Diagramm zu sehen: Die reale Momentenkurve beginnt erst beim Leerlaufstrom I_0, der gestrichelte Bereich der Kurve gehört zu einem negativen Drehmoment, d.h. der Motor muß in diesem Bereich von außen angetrieben werden. Die M_i-Kurve beginnt dagegen bei I = 0. Die reale Momentenkurve verläuft daher trotz größerer Steigung unterhalb der idealen.

Die beiden Kurven „treffen“ sich bei einem bestimmten Strom und Drehmoment. Diesen Punkt kann man berechnen oder einfacher aus folgender Überlegung ableiten: Wenn $M = M_i$ ist, dann ist ihre Differenz = M_v gleich Null. Dies ist aber nach der Definition Gl.(3) nur für n = 0 der Fall, d.h. für $I = I_k$ und $M = M_k$.

In der Praxis ist bei guten Motoren der Unterschied zwischen k_m und k_e meistens gering; der 2.Term in der Klammer in (16) ist vernachlässigbar gegenüber 1. Man rechnet dann oft so, als wäre die M-Kurve identisch mit der M_i-Kurve. Dies ist eine bequeme und schnelle Methode für Drehmoment- und Leistungsabschätzungen. Der Fehler, der dadurch entsteht, ist umso größer, je näher der betrachtete Betriebspunkt am Leerlauf liegt.

Leerlauf

Ein idealer Motor ohne Last und ohne Verlustmoment würde nach dem Anschließen an die Stromquelle solange hochdrehen, bis die Gegenspannung genau gleich der angelegten Betriebsspannung wird; der Strom wäre dann Null. Dieser Punkt ist im Diagramm der Schnittpunkt der Geraden mit der n-Achse. Die zugehörige Drehzahl bezeichnet man als die ideale (oder auch "ideelle") Leerlaufdrehzahl n_{0id}. Man erhält sie aus Gl. (5), wenn man I = 0 setzt und nach n auflöst. Hieraus folgt dann

$$n_{0id} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U}{k_e} \qquad [\mathrm{Upm}] \qquad (19)$$

Wird Gl. (13) durch die Spannung U dividiert, so wird

$$n_{sid} = \frac{n_{0id}}{U} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{1}{k_e} \qquad [\mathrm{Upm/V}] \qquad (20)$$

Dies ist die Leerlaufdrehzahl, die der Motor im Idealfall pro Volt Betriebsspannung erreicht. Sie wird deshalb als *ideale spezifische Drehzahl* n_{sid} bezeichnet. Abgesehen von dem Umrechnungsfaktor $30/\pi$, stellt die spezifische Drehzahl den Kehrwert von k_e dar, ist also ebenfalls eine konstruktive Konstante des Motors. Aus Gl. (14) folgt auch

$$k_e = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U}{n_{0id}} \qquad [\mathrm{Nm/A}] = [\mathrm{Vs}] \qquad (21)$$

Diese Beziehung ist sehr nützlich, denn meistens unterscheidet sich die reale Leerlaufdrehzahl n_0 (s.u.) nur wenig von der idealen, und nach Messen von U und n_0 kann man aus (16) das k_e berechnen und erfährt so mit wenig Messaufwand dann noch Einiges mehr über den Motor.

Der reale Motor weist nun aber das Verlust-Drehmoment M_V auf . Als Folge wird die ideale Leerlaufdrehzahl nicht erreicht, denn beim Strom Null würde dem Motor ja keinerlei Leistung mehr zur Deckung der Verluste zugeführt. Die Drehzahl wächst daher nur bis zu einem Wert, der kleiner ist als die ideale Leerlaufdrehzahl. Man bezeichnet diesen Wert als *reale Leerlaufdrehzahl* oder meistens einfach kurz als *Leerlaufdrehzahl* n_0.

Bei dieser Drehzahl fließt noch ein geringer Strom durch den Motor, der *Leerlaufstrom* I_0. Es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Verlustmoment und dem durch I_0 erzeugten inneren Drehmoment ein.
Aus Gl. (1) ergibt sich für I_0 das erzeugte innere Drehmoment

$$M_i = k_e \cdot I_0 \qquad [\mathrm{Nm}] \qquad (22)$$

Wenn man das Verlustmoment bei der Leerlaufdrehzahl n_0 mit M_{V0} bezeichnet, ist

$$M_{V0} = k_e \cdot I_0 \qquad \text{[Nm]} \qquad (23)$$

oder mit (3)

$$I_0 = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{k_L}{k_e} \cdot n_0 \qquad \text{[A]} \qquad (24)$$

Der Leerlaufstrom I_0 ist ein direktes Maß für die nicht-ohm´schen Verluste im Motor. Er wird daher häufig benutzt, um die Qualität von Motoren "auf die Schnelle" und mit wenig Aufwand zu überwachen.

Aus geometrischen Beziehungen (Strahlensatz) im I(n)-Diagramm ergibt sich für die reale Leerlaufdrehzahl

$$\frac{n_0}{n_{0id}} = 1 - \frac{I_0}{I_K} \qquad \text{[Upm]} \qquad (25)$$

und nach einigen Umformungen

$$n_0 = \frac{30}{\pi} \cdot U \cdot \frac{k_e}{k_e^2 + R \cdot k_L} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U}{k_m} \qquad \text{[Upm]} \qquad (26)$$

und

$$n_0 = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{k_e}{k_L} \cdot I_0 \qquad \text{[Upm]} \qquad (27)$$

Der Unterschied zwischen n_{0id} und n_0 ist nicht sehr groß, wie man z.B. aus Gl. (25) sehen kann. Das Verhältnis I_0/I_K d.h. von Leerlauf- zu Kurzschlußstrom, liegt normalerweise bei wenigstens 1/20 oder ist sogar noch kleiner. Damit fällt es gegenüber der "1" kaum mehr ins Gewicht. Im Falle von $I_0/I_K = 1/20$ wäre $n_0 = 0{,}95 * n_{0id}$.

$$n_0 \approx n_{0id}$$

Ebenso wie der Leerlaufstrom ist auch die Leerlaufdrehzahl ein gutes Maß für Eigenschaften und Qualität eines Motors. Man benützt sie daher zusammen mit dem schon erwähnten Leerlaufstrom zur schnellen Prüfung.

Leistung vs Drehzahl, P(n)

Mit dem Begriff "Leistung" von Elektromotoren ist normalerweise immer die Abgabeleistung gemeint. Manchmal wird dafür auch die Bezeichnung P_{ab} oder P_{mech} gebraucht. Die aus der Stromquelle aufgenommene sog. Eingangsleistung wird dagegen mit P_{el} oder P_{IN} bezeichnet.

Eingangsleistung P_{el}

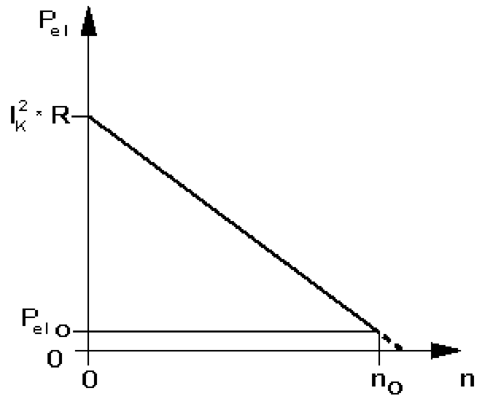
Die aufgenommene Leistung P_{el} berechnet sich einfach als das Produkt von Spannung und aufgenommenem Strom; mit Gl. (5) wird dann:

$$P_{el} = U \cdot I = U \cdot \left[\frac{U}{R} - \frac{U \cdot k_e}{R} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \right] \qquad \text{[W]} \qquad (28)$$

oder auch

$$P_{el} = U \cdot I = I_K^2 \cdot R - I_K \cdot k_e \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad \text{[W]} \qquad (29)$$

Dies ist wieder eine einfache Gerade, wie auch schon der Verlauf des Stroms.



Sie beginnt bei n = 0 mit dem Wert $I_K^2 * R$ und endet bei n = n_0 mit dem Wert

$$P_{el0} = I_0 \cdot U \qquad [W] \qquad (30)$$

P_{el0} ist die *Leerlaufleistung* des Motors.

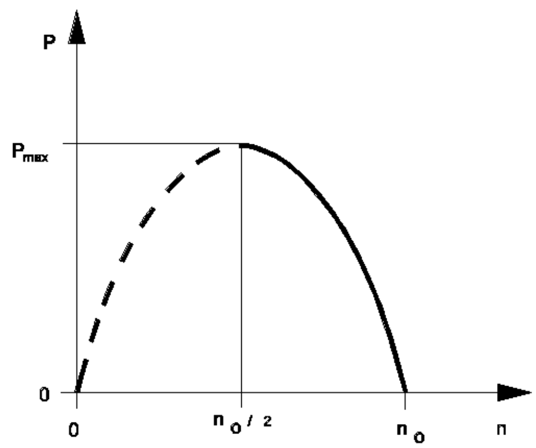
Abgabeleistung P

Wesentlich interessanter ist die Abgabeleistung P. Sie ergibt sich durch Multiplikation des Drehmoments mit der Drehzahl:

$$P = M \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n \qquad [W] \qquad (31)$$

oder

$$P = k_e \cdot \frac{U}{R} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n - \left(\frac{k_e^2}{R} + k_L \right) \cdot \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \cdot n^2 \qquad [W] \qquad (32)$$



Formel (27) stellt in einem Diagramm mit den Achsen n und P eine Parabel dar. Mit Hilfe der Differential-rechnung kann man zeigen, daß die maximale Abgabeleistung genau bei $n_0/2$, d.h. bei der halben Leerlaufdrehzahl erfolgt. Auch hier ist nur der Bereich zwischen $n_0/2$ und n_0 von Interesse. Links vom Maximum geht die Ausgangsleistung wieder zurück; andererseits steigen aber Strom und Eingangsleistung weiter an; der Motor würde zum "Heizofen".
Der *Maximalwert der Abgabeleistung* beträgt

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{R} \cdot \frac{k_e^2}{k_e^2 + R \cdot k_L^2} \qquad [W] \qquad (33)$$

Für einen “halbidealen“ Motor ohne Eisenverluste wäre $k_L = 0$, und damit wird aus Gl.(30)

$$P_{max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{R} \qquad [W] \qquad (34)$$

Dies ist eine oft gebrauchte Abschätzungsformel zur maximal möglichen Abgabeleistung. Bei größeren Motoren hat das Leistungsmaximum keine praktische Bedeutung, da der Strom ist in diesem Punkt viel zu groß (halber Kurzschlußstrom), und der Wirkungsgrad ist in diesem Punkt sehr schlecht (max. 50%, s.u.) ist. Kleine Motoren kann man kurzzeitig unter Inkaufnahme des schlechten Wirkungsgrads noch so betreiben.

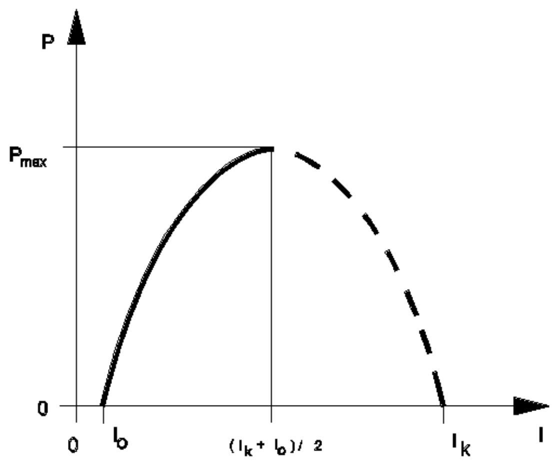
Man kann das Leistungsmaximum auch in den “Eckwerten“ M_k und n_0 ausdrücken, dann ist

$$P_{max} = \frac{1}{4} \cdot M_K \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n_0 \qquad [W] \qquad (35)$$

Wenn man die Ausgangsleistung *in Abhängigkeit vom Strom* wissen möchte, dann führt man zweckmäßigerweise den Kurzschlußstrom I_k und den Leerlaufstrom I_0 ein und findet nach einigem Rechnen die einfache Formel

$$P = (I - I_0) \cdot (I_K - I) \cdot R \qquad [W] \qquad (36)$$

Diese Gleichung stellt ebenfalls wieder eine Parabel dar. Im Gegensatz zum vorhergehenden Diagramm ist jetzt aber der rechte Zweig der Kurve ohne praktische Bedeutung. Es interessiert nur der linke Zweig (zwischen Leerlauf und Leistungsmaximum).



Die Lage und Größe des Leistungsmaximums erhält man mit Hilfe der Differentialrechnung. Es ergibt sich für die Lage

$$I_{\eta max} = \frac{1}{2} \cdot (I_k + I_0) \qquad [A] \qquad (37)$$

Die maximale Leistung ergibt sich also bei einem Strom in der Mitte zwischen Leerlauf- und Kurzschlußstrom. (im Diagramm eingezeichnet). Die maximale Leistung selbst beträgt

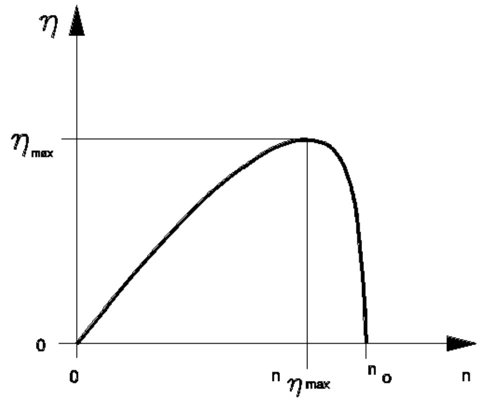
$$P_{max} = \frac{1}{4} \cdot R \cdot (I_k - I_0)^2 \qquad [W] \qquad (38)$$

Wirkungsgrad η

Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis von (Abgabe-) Leistung zu aufgenommener Leistung.

$$\eta = \frac{P}{P_{el}} \qquad (39)$$

Wirkungsgrad vs Drehzahl
Man könnte dazu versuchen, die weiter oben aufgestellten Formeln für Eingangs- und Ausgangsleistung in (39) einzusetzen, um so eine "Wirkungsgradformel" zu erhalten. Für den Wirkungsgrad abhängig von der Drehzahl führt dies aber zu einer umständlichen und unübersichtlichen Formel, mit der in der Praxis schwer umzugehen ist. Es ist deshalb zweckmäßiger, zuerst P und P_{el} in Abhängigkeit von der Drehzahl zu berechnen und anschließend mit (39) den Wirkungsgrad.
Im Diagramm ist der grundsätzliche Wirkungsgradverlauf über der Drehzahl dargestellt:

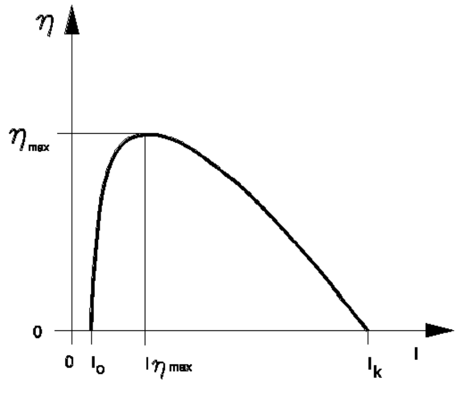


Beginnend mit η = 0 im Stand, steigt die Kurve zunächst fast linear mit der Drehzahl an, biegt dann mehr und mehr ab, und erreicht bei der Drehzahl $n_{\eta max}$ ihr Maximum. Mit weiter wachsender Drehzahl fällt sie dann bis zur Leerlaufdrehzahl n_0 hin steil ab bis auf Null.

Wirkungsgrad vs Strom
Wenn man den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Strom herleitet und dabei noch die Kennwerte I_k und I_0 einführt, dann ergibt sich nach einiger Rechnung die Formel

$$\eta = 1 + \frac{I_0}{I_K} - \frac{I}{I_K} - \frac{I_0}{I} \qquad (40)$$

In der Diagramm-Darstellung:



Wirkungsgrad-Maximum
Den Strom, bei dem der Wirkungsgrad seinen Maximalwert annimmt, erhält man auch hier wieder mit Hilfe der Differentialrechnung auf (35). Es ergibt sich dann für den *Strom beim maximalen Wirkungsgrad*

$$I_{\eta\max} = \sqrt{I_K \cdot I_0} \qquad [A] \qquad (41)$$

Und der *maximale Wirkungsgrad* selbst ist

$$\eta_{\max} = \left(1 - \sqrt{\frac{I_0}{I_K}}\right)^2 \qquad (42)$$

Die Formeln (41) und (42) sind bemerkenswert einfach. Man muß aber daran denken, daß in I_0 und I_k die Konstanten k_e, R, k_v sowie die Betriebsspannung U enthalten sind.

In k_e, k_v und R ausgedrückt, wird der maximale Wirkungsgrad

$$\eta_{\max} = \left(1 - \sqrt{\frac{R \cdot k_L}{k_e^2 + R \cdot k_L}}\right)^2 \qquad (43)$$

Die *Drehzahl des maximalen Wirkungsgrads* ist mit (7) und (36)

$$n_{\eta\max} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U}{k_e} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{R \cdot k_L}{k_e^2 + R \cdot k_L}}\right) \qquad \text{[Upm]} \qquad (44)$$

Die *Abgabeleistung im Wirkungsgrad-Maximum* beträgt

$$P_{\eta\max} = R \cdot \sqrt{I_k \cdot I_0} \cdot \left(I_k + I_0 - 2 \cdot \sqrt{I_k \cdot I_0}\right) \qquad \text{[W]} \qquad (45)$$

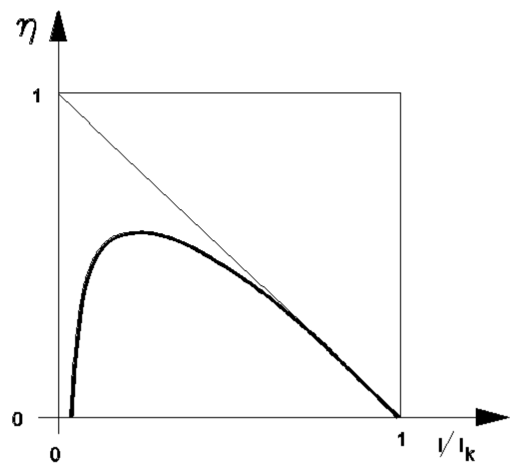
Sie ist meistens zu gering für eine praktische Anwendung, hat aber in Sonderfällen Bedeutung, z.B. bei Antrieben für Dauerflug mit geringster Leistung. Je höher das Wirkungsgrad-Maximum, desto kleiner ist die zugehörige Leistung.

Die Wirkungsgrad-Grenze

Aus der oben angegebenen Beziehung (35) ergibt sich eine bemerkenswerte, aber wenig bekannte Folgerung.
Nimmt man einen "halbidealen" Motor an, dann ist für diesen $k_L = 0$. Er hat keine Reibungs-, Eisenverluste etc., darf aber noch einen Widerstand R aufweisen. Für $k_L = 0$ ist dann auch der Leerlaufstrom $I_0 = 0$.
Die Gl. (40) vereinfacht sich dann zu

$$\eta = 1 - \frac{I}{I_K} \qquad (46)$$

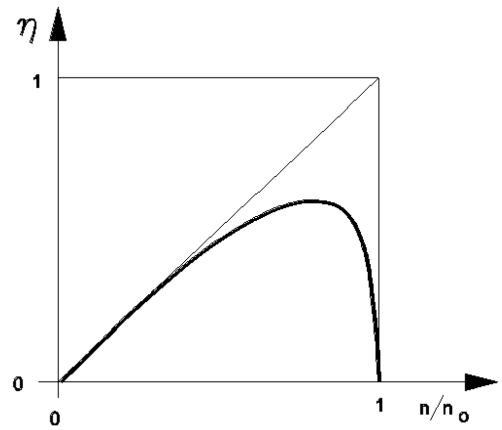
Diese Gleichung stellt aber in einem Diagramm mit den Achsen η und I/I_k die Diagonale η = 1 -> I/I_k = 1 dar.



Da der Wirkungsgrad eine realen Motors immer schlechter als der eines (halb-)idealen ist, bedeutet dies, daß die Wirkungsgradkurve immer unterhalb der Diagonalen verlaufen muß.

Insbesondere ist damit z.B. im Punkt der maximalen Leistung (I/I_k = 0,5) der Wirkungsgrad stets kleiner als 50%.

Eine entsprechende Grenze kann man auch für die Auftragung η über n/n_0 -also über dem Verhältnis Drehzahl/Leerlaufdrehzahl- herleiten:



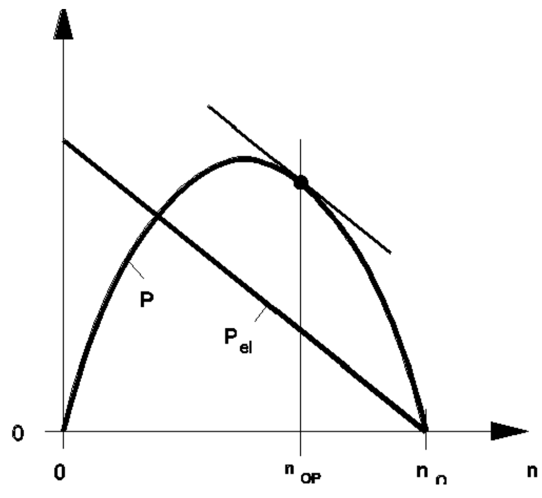
Hier ist die Diagonale vom Nullpunkt zum Punkt 1,1 die Grenze, welche die Wirkungsgradkurve nicht überschreiten kann.
Die Wirkungsgradkurve muß immer unterhalb dieser Diagonalen liegen. Beispielsweise kann bei einer Drehzahl von 80% der Leerlaufdrehzahl der Wirkungsgrad nicht höher als 80% sein. Da der reale Motor aber Verluste aufweist, wird der Wirkungsgrad noch um ein paar Prozentpunkte darunter liegen. Wird in irgendwelchen Diagrammen oder Datenangaben diese Grenze überschritten, so ist dies ein sicheres Zeichen dafür, daß Messfehler passiert sind oder "geschummelt" wurde.

Eine weitere Folge dieser Grenze ist, daß bei hohen maximalen Wirkungsgraden die Kurve in den Zwickel im rechten oberen Eck "passen" muß. Hohe maximale Wirkungsgrade sind damit automatisch "spitz" und liegen bei Drehzahlen nahe der Leerlaufdrehzahl; damit geht auch die Abgabeleistung zurück. Dies erschwert das Ausnützen des hohen maximalen Wirkungsgrads.

Der "O-Punkt"

Als Letztes soll noch der sog. "Optimalpunkt" (OP) erklärt werden. Er ist ein weiterer wichtiger Punkt auf den Betriebskennlinien. Er ist an sich nur wenig bekannt, andererseits wird die zu ihm gehörende Drehzahl häufig genannt.

Zur Erläuterung nochmals das Leistungsdiagramm, in dem der Verlauf von Eingangs- und Ausgangsleistung über der Drehzahl dargestellt sind. Beide Kurven sollen auf ihre Maximalwerte bezogen sein und haben damit beide den Maximalwert 1.



Wird –vom Leerlaufpunkt n_0 ausgehend- die Drehzahl verringert, dann wächst die relative Eingangsleistung P_{el} gleichförmig an. Die relative Ausgangsleistung wächst zunächst wesentlich stärker an. Wird die Drehzahl weiter verringert, dann wird die Zunahme der Ausgangsleistung als Folge der gekrümmten Kurve immer geringer, während die Zunahme der Eingangsleistung gleich bleibt.

Bei weiterer Reduzierung der Drehzahl kommt man schließlich zu einem Punkt, in dem die relative Zunahme von Eingangs- und Ausgangsleistung gleich groß sind. Dies wird im Bild durch die Parallele zur P_{el}-Linie verdeutlicht; beide Kurven haben bei dieser Drehzahl n_{OP} dann dieselbe Steigung.

In diesem Punkt sollte man mit der Drehzahl-Verringerung aufhören! Es ist zwar möglich, die Ausgangsleistung noch etwas weiter zu steigern, aber bei Drehzahlen unterhalb von n_{OP} wird das teuer erkauft: Die relative Ausgangsleistung wächst jetzt immer weniger, während die relative Eingangsleistung weiter zunimmt.

Im Leistungsmaximum schließlich wächst dann die Ausgangsleistung trotz weiter steigender Eingangsleistung nicht mehr weiter. Bei noch weiter sinkender Drehzahl wird die Ausgangsleistung sogar wieder kleiner, und aus dem Motor wird ein Heizofen.

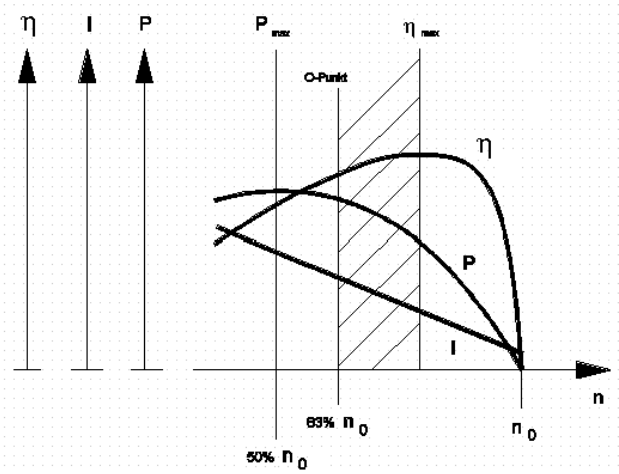
Berechnet man die Lage des O-Punktes, dann erhält man ein etwas überraschendes Ergebnis. Die zugehörige Drehzahl n_{OP} ist unabhängig von allen anderen Motordaten und gilt grundsätzlich für alle Motoren! Sie liegt stets bei 5/8 = 62,5% der Leerlaufdrehzahl.

$$n_{OP} = 0{,}625 \cdot n_0 \qquad \text{[Upm]} \qquad (47)$$

Die Drehzahl n_{OP} ist die niedrigste Drehzahl, bei der ein Motor von “Leistungsbewußten“ noch sinnvoll zu betreiben ist. Bei Hochleistungsmotoren kann es vorkommen, daß bei n_{OP} der Strom immer noch höher als der zulässige Maximalstrom ist; in diesem Fall kann der Motor nur kurzzeitig (einige Sekunden) bei dieser Drehzahl betrieben werden.

Der gesamte nutzbare Drehzahlbereich

Das letzte Bild zeigt nochmal den nutzbaren Drehzahlbereich im Zusammenhang.



Nur in dem schraffierten Bereich zwischen den Drehzahlen des O-Punktes und des besten Wirkungsgrads ist der Motor sinnvoll zu betreiben. Wenn die Motorparameter k_e, k_L und R sowie die Betriebsspannung bekannt sind, können mit den angegebenen Formeln diese Drehzahlen, die zugehörigen Ströme usw. berechnet werden.
