Helmut Schenk

Senkrecht Steigen

Auf Grund einer Anregung im RCN-Forum habe ich ein EXCEL-Rechenblatt „Senkrechtsteigen.xls“ geschrieben, mit dessen Hilfe die Steiggeschwindigkeit und die Steighöhe beim senkrechten Steigen eines Modells näherungsweise berechnet werden können. Um das Rechenblatt zu verwenden, muß man nicht unbedingt wissen, wie das Ergebnis zustande kommt. Hier soll nun gezeigt werden, wie das Programm rechnet und auf welchen Grundlagen und Annahmen es beruht. Vielleicht ist es für den einen oder andern von Interesse, diesen „Hintergrund“ kennenzulernen.

Unter „senkrecht steigen“ ist hier nicht Steigen durch Hochziehen aus dem schnellen Horizontalflug gemeint, sondern „echtes“ Steigen, beginnend mit der Geschwindigkeit Null, z.B. aus dem „Hovern“ oder einem senkrechten Handstart (ohne Anschieben) heraus.

Es ist klar, daß hierzu ein Schubüberschuß nötig ist, d.h. der Propellerschub muß größer sein als das Gewicht des Modells. Als Folge beschleunigt das Modell nach oben. Sobald es Fahrt aufnimmt, verringert sich aber beim Starrpropeller der Schub (Ausnahme: Propeller mit sehr hoher Steigung). Ferner tritt Luftwiderstand auf, der mit dem Quadrat der Geschwindigkeit anwächst. Dies führt dazu, daß sich bei einer gewissen Steiggeschwindigkeit Kräftegleichgewicht einstellt. Der Schub ist dann gerade gleich groß wie die Summe von Gewicht und Luftwiderstand. Das Modell beschleunigt dann nicht mehr, steigt aber weiter mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

Dieses Kräftegleichgewicht und die zugehörige „stationäre“ oder „End“-Steiggeschwindigkeit stellt sich nicht schlagartig ein, vielmehr wird mit zunehmender Geschwindigkeit der Geschwindigkeitszuwachs immer kleiner. Die Steiggeschwindigkeit nähert sich -mathematisch ausgedrückt- „asymptotisch“ dem Endwert und erreicht diesen erst nach unendlich langer Zeit. In der Realität ist das natürlich nicht so, sondern die Steiggeschwindigkeit wächst nicht mehr weiter an, wenn sie etwa 90 oder 95% des theoretischen Endwerts erreicht hat.

Ein gewisser „Trick“ bei der Rechnung ist, daß sie vom *gemessenen Standschub* ausgeht und nicht von irgendwelchen anderen Daten des Antriebs, wie z.B. Motorleistung und Drehzahl. Da der Standschub leicht gemessen werden kann, ist die Rechnung damit einerseits sehr praxisnah, und andererseits wird sie erheblich einfacher.

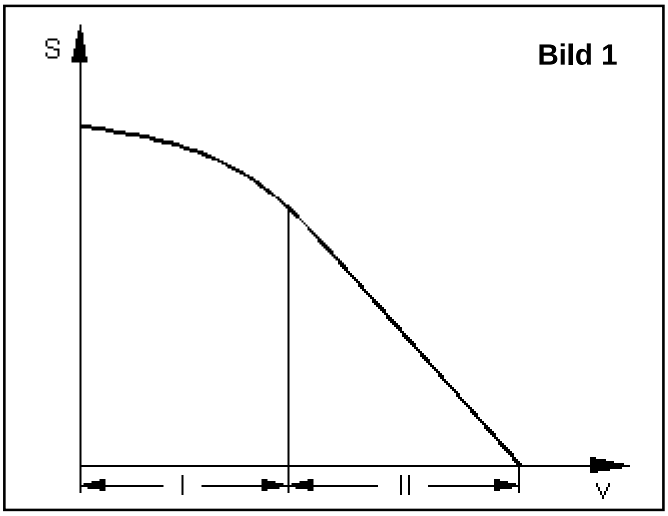
Wer unbedingt „Alles“ berechnen will, der kann zuvor mit einem andern Programm den Standschub berechnen und mit diesem Wert dann hier weiterrechnen. Ich muß aber darauf hinweisen, daß Standschub-Berechnungsprogramme manchmal im Ergebnis erheblich „daneben liegen“, und solche Fehler pflanzen sich natürlich hier dann fort.

1. Der Schubverlauf über der Fluggeschwindigkeit

Für die Rechnung ist der Schubverlauf abhängig von der Geschwindigkeit notwendig. Diesen aus Motorleistung und Propellerdaten genau zu ermitteln, ist eine aufwendige und fehlerträchtige Angelegenheit, wenn man nicht über genaue Daten von Motor und Propeller verfügt. Die Sache wird erheblich einfacher, wenn man davon ausgeht, daß der Standschub S_0 des Modells bekannt ist. Beim Hovern ist dieser gleich dem Gewicht des Modells. Es wird nun angenommen, daß der Schub durch „Gas“ oder „Strom“ geben um einen bestimmten „Schubüberschuß“-Faktor α erhöht wird. Den erhöhten Standschub S_1 kann man leicht messen, und es ist dann $\alpha = S_1/S_0 = S_1/G$.

Wir machen nun von einer Eigenschaft des Schubs Gebrauch, die häufig für schnelle Abschätzungen verwendet wird (Bild 1). In diesem ist der Verlauf des Schubs über der Fluggeschwindigkeit dargestellt:

Ausgehend vom Standschub bei v = 0 geht der Schub anfänglich etwa quadratisch mit der Fluggeschwindigkeit zurück, dieser Bereich ist im Bild mit „I“ bezeichnet. Ab einer gewissen Geschwindigkeit geht der Schubabfall dann aber in einen fast geradlinigen (linearen) Verlauf über, im Bild mit Bereich „II“ bezeichnet. Wir gehen hier davon aus, daß sich das Modell bei senkrechten Steigen immer im Bereich „I“ bewegt, den Fehler bei etwaigen Bereichsüberschreitungen nehmen wir in Kauf.



Weiter unten ist ein Beispiel für solche gemessenen, „realen“ Kennlinien gezeigt. Zuvor ist aber noch eine Erläuterung dazu notwendig.

In der Luftfahrttechnik wird bei der Auswertung von Propellermessungen der Schub nie direkt festgehalten bzw. angegeben, sondern stets in Form eines dimensionslosen *Beiwerts*. Dies ist analog z.B. der Auswertung von Auftriebsmessungen beim Tragflügel, dort wird bekanntlich der Auftriebsbeiwert c_a verwendet. Für den *Schub-Beiwert* gibt es (historisch bedingt) verschiedene Definitionen, wir verwenden hier die heute meistgebrauchte „NACA“-Definition. Hier heißt der Schub-Beiwert C_T, „Coefficient of Thrust“. Es ist definiert

$$C_T = \frac{S}{\rho \cdot \left(\frac{n}{60}\right)^2 \cdot D^4} \qquad (1)$$

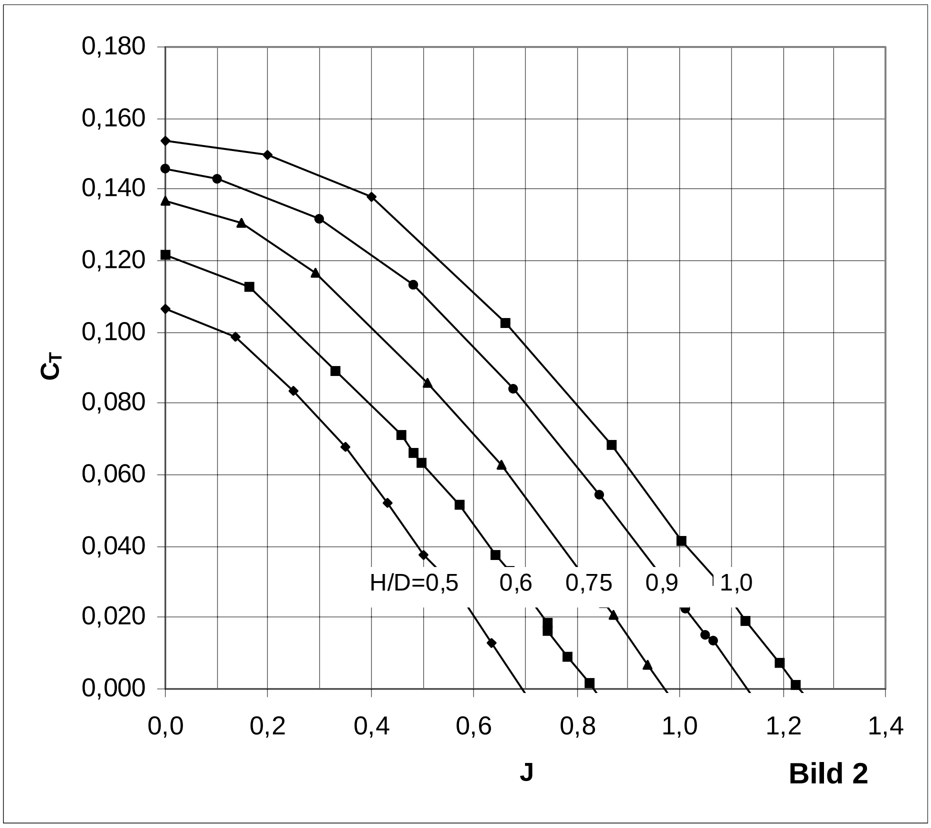
mit S = Schub [N]
ρ = Luftdichte [kg/m³]
n = Drehzahl [Upm]
D = Propellerdurchmesser [m]

Ferner verwendet man anstelle der Fluggeschwindigkeit immer den sog. *Fortschrittsgrad*, der (bis auf einen konstanten Faktor) das Verhältnis von Fluggeschwindigkeit zu Umfangsgeschwindigkeit -also auch wieder einen dimensionslosen Wert- darstellt. Dieses Geschwindigkeitsverhältnis charakterisiert den Anströmwinkel des Propellers und stellt eine Art „Anstellwinkel“ des Propellers dar. Es gibt auch dafür verschiedene Definitionen, wir verwenden auch hier die NACA-Definition:

$$J = \frac{v}{\left(\frac{n}{60}\right) \cdot D} = \frac{60 \cdot v}{n \cdot D} \qquad (2)$$

Hierin ist v = Fluggeschwindigkeit [m/s], Rest wie oben.

Mit diesen Kenntnissen können wir uns jetzt das Propellerdiagramm (Bild 2) ansehen: Es ist der Verlauf von C_T über dem Fortschrittsgrad J dargestellt, mit der dimensionslosen Propellersteigung H/D als Parameter (H = Steigung in [m]). Wenn wir von konstanter Drehzahl ausgehen, dann ist dies gleichwertig mit einer Auftragung über der Fluggeschwindigkeit v.



Man sieht, wie die Kurven, vom Stand (J = 0) ausgehend, erst „gekrümmt“ und dann nahezu geradlininig mit steigendem J abfallen. Bei dem jeweiligen J, bei dem die Kurven die J-Achse schneiden, wird der Schub schließlich zu Null. Je größer die Steigung H/D des Props ist, desto höher liegt der Standschub (-beiwert), und bei desto größeren Fortschrittsgraden (=>Fluggeschwindigkeiten) erzeugen sie noch „brauchbaren“ Schub.

Das Diagramm stammt aus dem sog. „Warschau-Report“, einer Sammlung von Messergebnissen der Technischen Hochschule Warschau aus den späten 30er-Jahren. Es wurden damals Modell-Propeller vermessen, die unseren heutigen Flugmodellpropellern sehr nahekommen, und die Messungen erfolgten bei Re-Zahlen, die unseren Modellen entsprechen. Das obige Diagramm liegt auch einer Kurve für den Einfluß von H/D zugrunde, die wir weiter unten brauchen.

Mit diesem „Rüstzeug“ versehen können wir jetzt losrechnen, um den Schub zu berechnen.
Den Verlauf des Schubs im Bereich „I“ kann man formelmäßig schreiben als

$$C_T = C_{T0} - k \cdot J^2 \qquad (3)$$

hierin ist C_{T0} der Schubbeiwert im Stand (J = 0),
und k ist ein Faktor, der den Einfluß der Propellersteigung erfaßt. Zu jedem H/D gibt es einen bestimmten Wert k. Durch Auswertung des Diagramms Bild 2 kann man ein Diagramm zeichnen, das den Wert von k abhängig von H/D darstellt; dies ist in Bild 3 gezeigt. Je größer die Steigung, desto kleiner wird der Wert k. Wir können im Folgenden also k als bekannt voraussetzen.

Es ist allgemein nach (1)

$$S = C_T \cdot \rho \cdot \left(\frac{n}{60}\right)^2 \cdot D^4 \qquad (4)$$

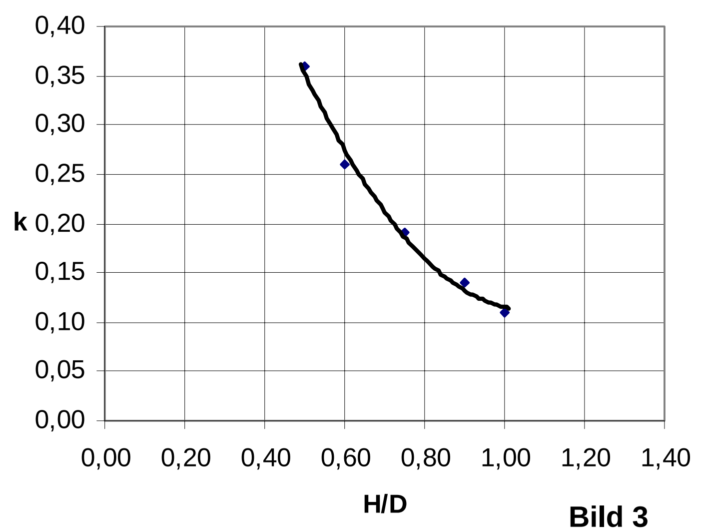


Bild 3

und mit (3) dann

$$S = \left(C_{T0} - k \cdot J^2\right) \cdot \rho \cdot \left(\frac{n}{60}\right)^2 \cdot D^4 \qquad (5)$$

Für den Schwebeflug (hovern) ist J = 0, die Drehzahl n = n_0 und damit der Schub

$$S_0 = C_{T0} \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_0}{60}\right)^2 \cdot D^4 \qquad (6)$$

Um das Modell zum Steigen zu bringen, wird „Gas“ bzw. „Strom“ gegeben, dadurch steigt die Propellerdrehzahl auf den Wert n_1. Dadurch wächst der Standschub auf den Wert

$$S_1 = C_{T0} \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_1}{60}\right)^2 \cdot D^4 \qquad (7)$$

Mit dem anfangs definierten Schubüberschuß-Faktor α ist

$$S_1 = \alpha \cdot S_0 \qquad (8)$$

und mit (6) und (7) ist kriegen wir das „Nebenergebnis“

$$\left(\frac{n_1}{60}\right)^2 = \alpha \cdot \left(\frac{n_0}{60}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad n_1 = \sqrt{\alpha} \cdot n_0 \qquad (9)$$

Um beispielsweise einen Schubüberschuß von 50% (Schubüberschußfaktor 1,5) zu erzielen, muß die Drehzahl um den Faktor $\sqrt{1{,}5} = 1{,}22$ erhöht werden.

Im Schwebeflug ist $S_0 = G = m \cdot g$ (10)

Mit G = Modellgewicht [N]
m = Masse des Modells [kg]
g = Erdbeschleunigung = 9,81 [m/s²]

Aus (6) und (10) ergibt sich für die Drehzahl n_0

$$\left(\frac{n_0}{60}\right)^2 = \frac{m \cdot g}{C_{T0} \cdot \rho \cdot D^4} \qquad (11)$$

und damit auch

$$\left(\frac{n_1}{60}\right)^2 = \frac{\alpha \cdot m \cdot g}{C_{T0} \cdot \rho \cdot D^4} \qquad (12)$$

Wir kommen nun nicht um die Annahme herum, daß die Propellerdrehzahl während des Steigflugs annähernd konstant bleibt, obwohl dies in der Realität nicht ganz der Fall ist; die Propeller drehen -je nach Motor und Prop- bis zu etwa 10% „auf“. Man könnte dies im Prinzip berücksichtigen; dadurch würde die ganze Rechnung aber erheblich komplizierter, und vor allen wären Daten von Motor und Propeller nötig, die schwierig zu beschaffen sind. Immerhin können wir uns vorstellen, daß im Modell ein Regler für „constant-speed“ des Props eingebaut ist, und so die Zukunft etwas vorwegnehmen.

Aus (5) wird der gesuchte Schubverlauf bei der Drehzahl n_1

$$S = C_{T0} \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_1}{60}\right)^2 \cdot D^4 - k \cdot J^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_1}{60}\right)^2 \cdot D^4 \tag{13}$$

$$= S_1 - k \cdot J^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_1}{60}\right)^2 \cdot D^4 \tag{14}$$

$$= m \cdot g \cdot \alpha - k \cdot J^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{n_1}{60}\right)^2 \cdot D^4 \tag{15}$$

Gemäß (2) ist für $n = n_1$

$$J = \frac{60 \cdot v}{n_1 \cdot D} \tag{16}$$

und damit

$$J^2 = \left(\frac{60}{n_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{D^2} \tag{17}$$

Durch Einsetzen von (17) in (15) wird die Endformel für den Schubverlauf dann

$$\boxed{S = m \cdot g \cdot \alpha - k \cdot \rho \cdot D^2 \cdot v^2} \tag{18}$$

2. Der Steigflug

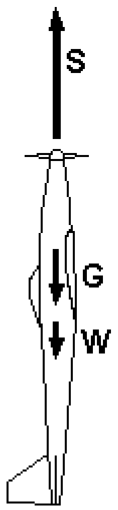


Bild 4

Unser Modell bewegt sich unter Einfluß der Kräfte Schub S, Gewicht G und Luftwiderstand W. Hierfür gilt das fundamentale Bewegungsgesetz

Masse x Beschleunigung = Summe aller angreifenden Kräfte

Als Formel geschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = S - G - W \tag{19}$$

Hierin wird eingesetzt:
S aus Gleichung (18), G aus Gleichung (10)
und für den Luftwiderstand die bekannte Beziehung

$$W = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot c_w \cdot F \tag{20}$$

mit c_w = Widerstandsbeiwert des Modells bei $c_a = 0$
F = Flächeninhalt des Modells [m^2]

Wenn wir gleich noch durch die Masse m dividieren, dann ergibt sich die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \cdot g - \frac{\rho}{m} \cdot D^2 \cdot k \cdot v^2 - g - \frac{\rho}{2} \cdot c_w \cdot F \cdot v^2 \tag{21}$$

oder zusammengefaßt

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot (\alpha - 1) - \frac{\rho}{m} \cdot \left(k \cdot D^2 + \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot F \right) \cdot v^2 \qquad (22)$$

Um nicht weiter die langen Ausdrücke mitschleppen zu müssen, führen wir zwei Abkürzungen ein:

$$A = g \cdot (\alpha - 1) \qquad (23)$$

$$B = \frac{\rho}{m} \cdot \left(k \cdot D^2 + \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot F \right) \qquad (24)$$

Da alle in A und B vorkommenden Größen konstant sind, sind A und B auch wieder Konstanten, in denen die speziellen Umstände des Einzelfalls stecken. Damit lautet jetzt unsere Beziehung:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v^2} \qquad (25)$$

Dies ist eine einfache, aber immerhin nichtlineare Differentialgleichung für v(t). Der Weg zu ihrer Lösung soll hier übergangen werden, daher gleich das Ergebnis:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{A \cdot B}} \cdot \ln \frac{\sqrt{A \cdot B} + B \cdot v}{\sqrt{A \cdot B} - B \cdot v} = t \qquad (26)$$

Das ist noch nicht ganz das, was wir wollen, weil wir hieraus die Zeit t aus der Geschwindigkeit v erhalten; wir müssen diese Gleichung deshalb noch nach v auflösen. Das Ergebnis lautet dann:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{e^{2 \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot t} - 1}{e^{2 \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot t} + 1}} \qquad (27)$$

Diese Gleichung beschreibt, welche Geschwindigkeit das Modell nach der Zeit t erreicht hat. Sie sieht wenig schön aus, lässt sich nicht weiter vereinfachen, und würde auch einige Rechenarbeit erfordern, wenn wir keinen Rechenknecht (Computer) hätten. Man kann sie aber noch ein wenig interpretieren und dann besser verstehen:
Ihr erster Term ($\sqrt{A/B}$) ist wieder eine Konstante, und stellt nichts Anderes als die Endgeschwindigkeit dar, die das Modell erreicht. Der zweite Term (Bruch mit den e-Funktionen) berechnet einen Faktor, der abhängig von der Zeit t zwischen 0 und 1 liegt. Für t = 0 ist dieser Term auch = 0, damit auch die Geschwindigkeit v; für große t geht der Term gegen 1 und damit die Geschwindigkeit gegen die Endgeschwindigkeit.

Mit dieser Formel berechnet das EXCEL-Blatt die Steiggeschwindigkeit für t =1, 2, 3,.....Sekunden. Für kleinere „Räume“, Modelle und Schubüberschüsse kann man natürlich in EXCEL dann die „Zeitstationen“ 0, 0,1, 0,2, 0,3 usw. vorgeben.

Bleibt jetzt noch die Berechnung der erreichten Höhe.
Rein „formal“ ist das recht einfach, man muß nur Gl. (27) über der Zeit integrieren:

$$h = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{e^{2 \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot t} - 1}{e^{2 \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot t} + 1} \cdot dt \qquad (28)$$

Leider habe ich keine geschlossene Lösung dafür gefunden; vielleicht gibt es auch garkeine. In solchen Fällen integriert man dann numerisch. Im EXCEL-Blatt wird die allereinfachste Möglichkeit

dazu verwendet (Trapez-Integration):
Für jedes Zeitintervall (0-1, 1-2, 2-3 usw. Sekunden) wird der Mittelwert der Steiggeschwindigkeit aus Anfangs- und Endwert berechnet und mit der Intervalldauer multipliziert. Diese Werte werden laufend aufsummiert und geben die erreichte Höhe an. Es gibt selbstverständlich genauere Methoden, aber für unsere Aufgabe ist ist dieses einfache Verfahren ausreichend.

Anmerkungen
Im EXCEL-Blatt wird der Faktor k mit Hilfe eines Näherungs-Polynoms ermittelt, das mit der EXCEL-Funktion Trendlinie/Options/Polynomisch 2. Ordnung gewonnen wurde.

Es wird empfohlen, den „vorbesetzten" Wert für c_w bei 0,020 zu lassen, sofern nicht genauere Werte (aus Modellberechnung) bekannt sind. 0,020 stellt eine akzeptablen Mittelwert für übliche Modelle dar, für „fliegende Drahtverhaue" kann man auch mal 0,03, für aerodynamisch hochwertige Modelle 0,015 einsetzen. In den Ergebnissen wird sich in der Regel nicht viel ändern, da der dominierende Anteil am erforderlichen Schub vom Modellgewicht herrührt. Trägt man für c_w den Wert Null ein, dann steigt das Modell so, als hätte es keinen Luftwiderstand.

Im rechten unteren Eck werden Zwischenwerte angezeigt, die aber für den normalen Anwender keine Bedeutung haben. A und B sind die hier definierten Abkürzungen; B_1 und B_2 sind die beiden Anteile des „Verlustglieds" B; C ist der Ausdruck 2*Wurzel(A*B), und B_2% stellt den prozentualen Anteil des Luftwiderstands im Verlustglied B dar.

Bis auf die dick umrandeten gelben Eingabefelder sind alle Felder des Blattes schreibgeschützt, damit sie nicht versehentlich überschrieben werden können. Dieser Schreibschutz kann auf bekannte Weise (unter „Extras") aufgehoben werden.

Achtung: Die Rechnung nimmt keine Rücksicht darauf, was für eine Antriebsleistung notwendig ist; sie geht einfach davon aus, daß mit den eingegebenen Propellerabmessungen der eingegebene Schubüberschußfaktor vorhanden ist (Ergebnis einer Standschubmessung). Das führt manchmal zu etwas überraschenden Ergebnissen, über die man erstmal nachdenken sollte.

Happy computing !

Helmut Schenk 6/2003