Motorgleichungen und ihre Anwendung

1. Das erzeugte Drehmoment M_i

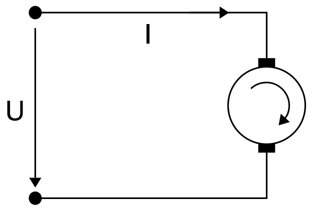
$$M_i = k_M \cdot I \tag{1}$$

bedingt durch die vernachlässigbare Ankerrückwirkung ist das erzeugte Drehmoment M_i dem Ankerstrom I direkt proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist gegeben durch die sogenannte Drehmomentskonstante k_M

2. Die aufgenommene elektrische Leistung P_1

$$P_1 = U \cdot I \tag{2}$$

ist das Produkt von Klemmenspannung U und Ankerstrom I



3. Die abgegebene mechanische Leistung P_2

$$P_i = M_i \cdot \omega \tag{3}$$

die erzeugte mechanische Leistung P_i ist das Produkt von erzeugtem Drehmoment M_i und Winkelgeschwindigkeit ω

$$M = M_i - M_R \tag{4}$$

das an der Welle zur Verfügung stehende Drehmoment M ist die Differenz zwischen erzeugtem Drehmoment M_i und Reibungsmoment M_R

$$\omega = \frac{\pi}{30} \cdot n \tag{5}$$

die Umrechnung der Drehzahl n [$\min^{-1}$] in die Winkelgeschwindigkeit ω erfolgt über Faktor $\frac{\pi}{30}$

$$P_2 = M \cdot \omega \tag{6}$$

4. Die Joule'sche Verlustleistung P_J

$$P_J = I^2 \cdot R_\delta \tag{7}$$

für die genaue Rechnung muss natürlich mit der Erwärmung des Rotors infolge der Joule'schen Verluste und der Reibungsverluste, der Anschlusswiderstand R korrigiert werden. Für die prinzipielle Darstellung ist es jedoch durchaus zulässige eine Rotortemperatur von 25°C vorauszusetzen.

5. Das Leistungsgleichgewicht

$$P_1 = P_i + P_J \tag{8}$$

die aufgenommene elektrische Leistung P_1 teilt sich auf in die erzeugte mechanische Leistung P_i und in die Joule'sche Verlustleistung P_J.

6. Die Motorkonstante k

$$k = \frac{k_M}{\sqrt{R}} \tag{9}$$

für die Darstellung der Abhängigkeit von Winkelgeschwindigkeit ω vom Drehmoment M_i ist es zweckmässig, eine Motorkonstante k entsprechend Gleichung (9) zu wählen.

7. Die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω vom Drehmoment M_i

aus $P_1 = P_i + P_J$ und (2), (3), (7) erhalten wir

$$\omega = \frac{U \cdot I - I^2 \cdot R}{M_i} \tag{10}$$

mit (1) und (9) ergibt sich dann

$$\omega = \frac{U}{k\ \sqrt{R}} - \frac{M_i}{k^2} \tag{11}$$

dies ist die Gleichung einer Geraden im Koordinatensystem ω und M_i

8. Die graphische Darstellung $\omega = \omega\ (M_i)$ bzw. $I = I\ (M)$

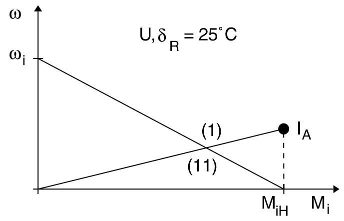
für $M_i = 0$

$\omega_i = \frac{U}{k\ \sqrt{R}} = \frac{U}{k_M}$ (12) die ideelle Winkelgeschwindigkeit

für $\omega = 0$

$M_{iH} = \frac{k \cdot U}{\sqrt{R}} = \frac{U}{R} \cdot k_M$ (13) das erzeugte Anhaltemoment

Parameter in dieser Darstellung sind die Spannung U und die Rotortemperatur

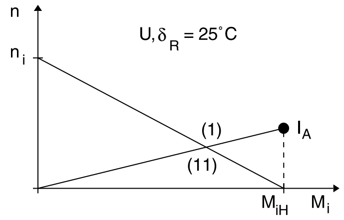


9. Die graphische Darstellung $n = n\ (M_i)$ bzw. $I = I\ (M_i)$

wegen (5) kann man auch die Drehzahl anstelle der Winkelgeschwindigkeit als Funktion des erzeugten Drehmomentes darstellen.

$$n = \frac{30}{\pi}\left(\frac{U}{k\ \sqrt{R}} - \frac{M_i}{k^2}\right) \tag{14}$$

$$n_i = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U}{k_M} \tag{15}$$



10. Der Motorwirkungsgrad

$\eta = \frac{P_2}{P_1}$ (16) und mit Gleichung (6), (8), (3), (7)

$$\eta = \frac{M \cdot \omega}{(M + M_R)\ \omega + I^2\ R}$$

woraus man erkennen kann, inwieweit der Wirkungsgrad η vom Reibungsmoment M_R und den Joule'schen Verlusten abhängig ist.

11. Der maximale Wirkungsgrad $\eta_{max.}$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{M \cdot \omega}{U \cdot I}$$

$$I_A = \frac{U}{R} \rightarrow U = I_A \cdot R$$

$$P_1 = U \cdot I = I_A \cdot R \cdot I$$

$$M_i = k_M \cdot I$$

$$M = M_i - M_R = k_M\ (I - I_0)$$

$$\omega = \frac{U \cdot I - I^2\ R}{M_i} = \frac{I_A \cdot R \cdot I - I^2\ R}{k_M \cdot I} = \frac{R}{k_M}\ (I_A - I) \tag{17}$$

$$\eta = \frac{(I - I_0)\ (I_A - I)}{I_A \cdot I} \tag{18}$$

den Maximalwert der Funktion $\eta = \eta\ (I)$ erhalten wir bekanntlich über das Nullsetzen der ersten Ableitung

$\frac{d\eta}{dI} = 0$ damit wird

$$\eta_{max} = \left(1 - \sqrt{\frac{I_0}{I_A}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{M_R}{M_{iH}}}\right)^2 \tag{19}$$

Vereinfacht wird dabei das Reibungsmoment M_R als drehzahlunabhängig angenommen.

12. Der Anlaufvorgang bei konstanter Klemmspannung

Ausgehend von der allgemeinen Bewegungsgleichung einer rotierenden Masse mit dem Trägheitsmoment J können wir schreiben

$$M_b = J \cdot \frac{d\omega}{dt} \tag{20}$$

$M_b = M_i - M_R - M \qquad J = J_R + J_L$