Berechnung des Standschubs nach der Strahltheorie

Die Strahltheorie (engl. Momentum Theory) ist die älteste und einfachste Methode, den Schub von Propellern und Rotoren zu berechnen. Sie wurde von Rankine (1865) und Froude (1885) entwickelt.

Sie kann auf verschiedenste Flugzustände angewandt werden; beispielsweise den Vorwärtsflug von Starrflüglern, aber z. B. auch (zumindest bereichsweise) auf den vertikalen Steig- oder Sinkflug von Helicoptern. Alles Nachfolgende gilt jedoch ausschließlich für den Standschub-Fall, z. B. den Schwebeflug von Helicoptern und Multicoptern.

Der Idealpropeller

Die Strömung wird dazu idealisiert, wie in Bild 1 dargestellt; sie durchläuft dabei „Stationen" 0 bis 3 innerhalb angenommener Strahlgrenzen. Ein Volumenstrom (in m³/s) bzw. Massenstrom (in kg/s) wird „aus der Ruhe" -Station 0-, weit vor der Propellerebene, angesaugt. Station 1 ist unmittelbar vor der Propellerebene, Station 2 unmittelbar hinter dieser. Station 3 ist weit hinter der Propellerebene, wo der Strahl „voll entwickelt" ist.
Die Propellerebene selbst ist eine „dünne Scheibe" (engl. actuator disc), in der Energie von Außen in die Strömung eingebracht wird. Wie dies im Detail geschieht, kann mit der Strahltheorie nicht behandelt werden; das ist erst mit aufwändigeren Theorien (z. B. Blattelement-Theorie) möglich.

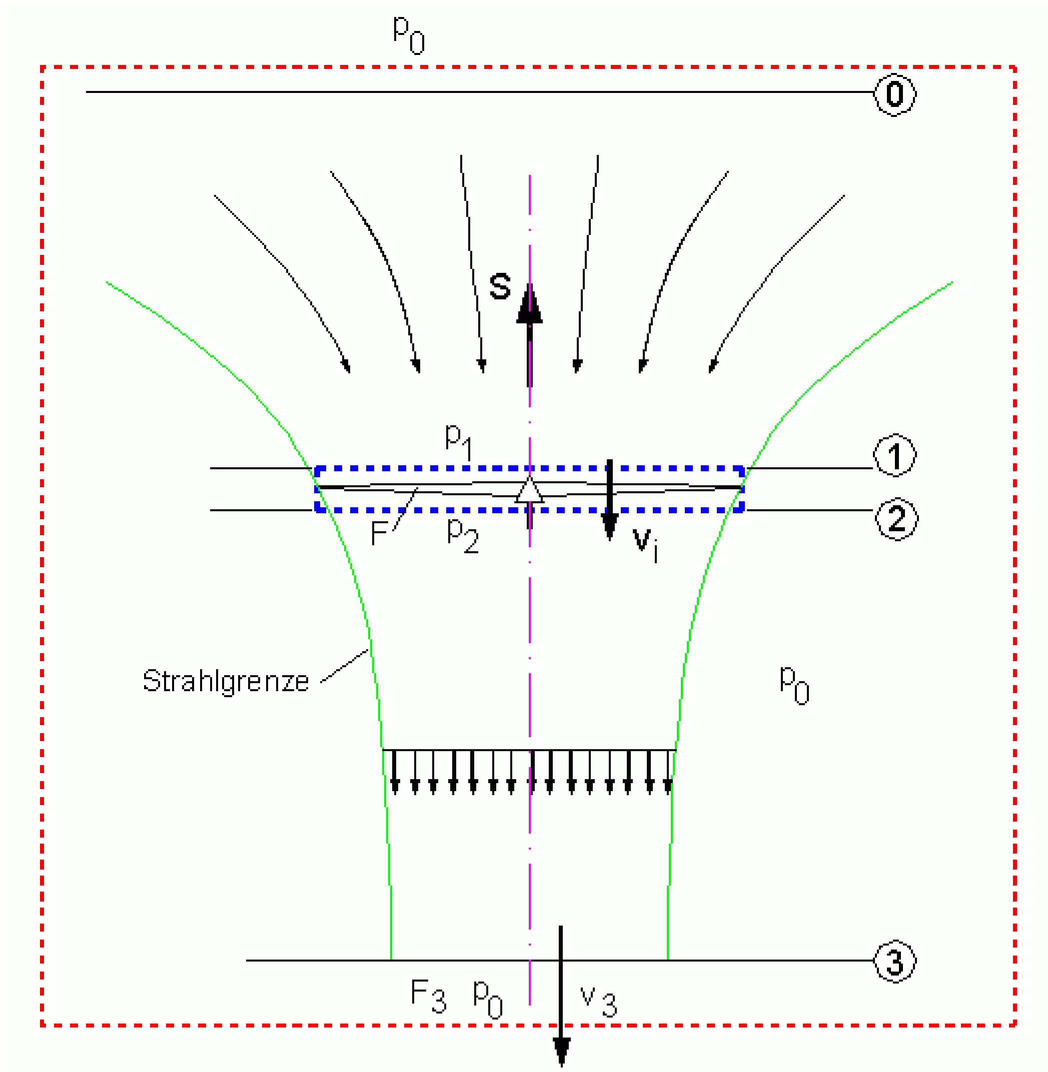


Bild 1

Ferner wird eine Anzahl von Effekten vernachlässigt /1/ :

1. Profilwiderstand der Rotorblätter, der vor allem nutzlose leistungsverbrauchende Sekundärströmungen im Nachstrom verursacht,
2. Drall im abgehenden Luftstrom, als die wesentliche Sekundärströmung,
3. ungleichmäßige Druckverteilung über der Rotorebene und damit Scherungen,
4. ungleichmäßiger Durchfluss durch die Rotorebene,
5. zentraler Störkörper, Verdrängung, Verwirbelung, Strömungswiderstand,
6. Blattspitzenverluste, durch den Druckunterschied zwischen Blattober- zur -unterseite,
7. cutout (nicht profilierter Blatthals), der keinen Beschleunigungsbeitrag liefert,
8. endliche Blattzahl, dadurch punktuell unterschiedliche Beschleunigungen,
9. Kompressibilität der Luft, hier noch minimal,
10. Machzahleffekte, hier noch gering,
11. Re-Zahl, mit ihrem Einfluss auf den Umschlag laminar/turbulent in der Strömungsgrenzschicht.

Trotz dieser Vereinfachungen liefert die Strahltheorie wichtige Erkenntnisse.

Geschwindigkeits- und Druckverlauf

In Station 0 ist die Geschwindigkeit noch Null und es herrscht der Umgebungsdruck p_0. Auf ihrem Weg zur Propellerscheibe mit der Querschnittsfläche F nimmt die Geschwindigkeit ständig zu und hat in der Scheibe den Wert v_i **.**

Diese Geschwindigkeit v_i, mit der die Propellerscheibe durchströmt wird, wird "induzierte Geschwindigkeit" genannt.

Da wir annehmen, dass die Stationen 1 und 2 nur sehr gering vor bzw. hinter der Propellerscheibe liegen sollen, herrscht in beiden die Geschwindigkeit v_i. Als Folge der Geschwindigkeitszunahme von Station 0 auf 1 muss der Druck auf einen Wert p_1 in Station 1 absinken.
Für dieses Intervall der Strömung gilt die Bernoulli-Gleichung

$$p_0 + 0 = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_i^2 \quad \text{bzw.} \quad p_1 = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot v_i^2 \tag{1}$$

Auf das Stationsintervall 1-2 kann die Bernoulli-Gleichung nicht angewendet werden, da hier Energie zugeführt wird und die Gleichung nur auf Strömungen angewendet werden darf, bei denen keine Energie entzogen oder zugeführt wird. Da die Geschwindigkeit in Station 1 und 2 gleich ist, kann die Energiezufuhr nur als eine Druckerhöhung auftreten.

Im Intervall 2-3 gilt die Bernoulli-Gleichung wieder; es ist

$$p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_i^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2 \tag{2}$$

Durch Subtraktion (1) von (2) folgt

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2 \tag{3}$$

Wenn wir die Druckdifferenz $p_2 - p_1$ als Differenzdruck Δp bezeichnen, ist

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2 \tag{4}$$

Die Drucksteigerung bzw. Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite der Propellerscheibe ist gleich groß wie der Staudruck im voll entwickelten Strahl.

Der Druck nimmt in der Propellerscheibe um Δp auf den Wert p_2 zu

$$p_2 = p_1 + \Delta p \tag{5}$$

Nun wenden wir den Strömungs-Impulssatz auf die blau gestrichelte „Kontrollfläche“ an. Dessen Geschwindigkeitsanteile (und damit der Massenfluss) liefern keine Beiträge zum Impuls; es bleiben nur die Druckanteile

$$S = (F \cdot p_2 - F \cdot p_1) = F \cdot \Delta p \tag{6}$$

oder mit (4) auch

$$S = F \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2 \tag{7}$$

Der Schub ist gleich der Druckdifferenz an der Propellerscheibe, bzw. dem Staudruck im vollentwickelten Strahl, multipliziert mit dem Flächeninhalt der Scheibe.

Die Gleichung (6) lässt sich auch umschreiben

$$S / F = \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2 \tag{8}$$

S/F **wird als die sog. Strahlflächenbelastung (engl. Disc Loading) des Propellers bezeichnet.**
Der Staudruck des voll entwickelten Strahls ist gleich der Strahlflächenbelastung des Propellers.

Der Impulssatz wird nun auch auf die große, rot gestrichelte Kontrollfläche angewendet. Hier herrscht überall der Druck p_0, und die Druckanteile werden Null. Der Geschwindigkeitsanteil in Station 0 ist ebenfalls Null.

In Station 3 hat die Geschwindigkeit den Wert v_3, und mit dem Massenfluß $\dot{m}$ wird der ausströmende Impuls und damit der Schub

$$S = \dot{m} \cdot v_3 \tag{9}$$

Der Massenfluss ist in allen Stationen gleich groß; in der Propellerscheibe beträgt er

$$\dot{m} = \rho \cdot F \cdot v_i \tag{10}$$

Damit wird der Schub

$$S = \rho \cdot F \cdot v_i \cdot v_3 \tag{11}$$

In der Propellerscheibe muss die „Pumpleistung“ P_i aufgewendet werden, um den Druckanstieg Δp zu erzeugen:

$$P_i = \Delta p \cdot F \cdot v_i \tag{12}$$

Diese Leistung P_i wird „induzierte Leistung“ genannt.

Mit (6) und (11) ist dann

$$P_i = \rho \cdot F \cdot v_i^2 \cdot v_3 \tag{13}$$

Die Leistung im abgehenden Strahl beträgt

$$P_{Str} = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} \cdot v_3^2 \tag{14}$$

Da keine weiteren Leistungen zu- oder abgeführt werden, müssen nach dem Energiesatz die beiden Leistungen gleich sein, $P_i = P_{Str}$:

$$\rho \cdot F \cdot v_i^2 \cdot v_3 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot F \cdot v_i \cdot v_3^2 \tag{15}$$

und damit wird $$v_i = \frac{1}{2} \cdot v_3 \quad \text{bzw.} \quad v_3 = 2 \cdot v_i \tag{16}$$

Die Geschwindigkeit im „voll entwickelten“ Strahl ist doppelt so hoch wie die induzierte Geschwindigkeit in der Propellerebene.

Als Folge der Geschwindigkeitszunahme von v_i auf v_3 muss der Druck im Intervall 2 –3 abnehmen, bis in Station 3 der Umgebungsdruck wieder erreicht ist; dann steigt die Geschwindigkeit nicht mehr weiter an. Der gesamte Druckverlauf ist in Bild 2 dargestellt:

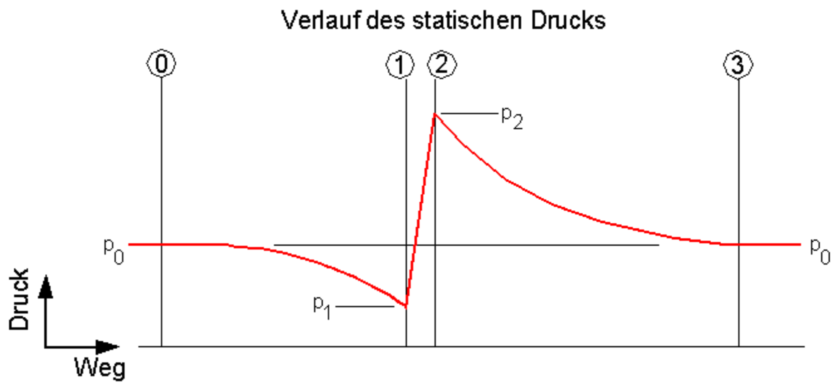


Bild 2

Die Schubformel

Wegen des konstanten Massenflusses wird die Querschnittsfläche des Strahls in Station 3

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot F \tag{17}$$

v_3 aus (16) kann jetzt in (11) eingesetzt werden, und es wird

$$S = 2 \cdot \rho \cdot F \cdot v_i^2 \tag{18}$$

oder nach v_i aufgelöst, die Strömungsgeschwindigkeit in der Propellerebene

$$\boxed{v_i = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \rho}} \cdot \sqrt{\frac{S}{F}}} \tag{19}$$

Hiermit und mit (11) wird dann die induzierte Leistung

$$\boxed{P_i = S \cdot v_i = S \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \rho}} \cdot \sqrt{\frac{S}{F}}} \tag{20}$$

oder, da die induzierte Leitung gleich der (idealen) Wellenleistung $P_{w,id}$ ist

$$\boxed{P_{w,id} = P_i = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \rho}} \cdot \sqrt{\frac{S^3}{F}}} \tag{21}$$

Der Leistungsbedarf wächst mit der Potenz 3/2 mit dem Schub.

Formel (21) ist die bekannte und wichtigste Beziehung zwischen Schub und Leistungsbedarf eines Idealrotors im Stand. P_i ist die an der Rotorwelle notwendige Mindestleistung P_w, um den Schub S zu erzeugen. Diese Leistung geht im Rotorstrahl verloren. Da P_i bzw. $P_{w,id}$ das absolute Minimum an notwendiger Antriebsleistung darstellt, eignet sich diese Größe gut zum Vergleich mit der Antriebsleistung eines realen Rotors.

Die hier dargestellte einfache Strahltheorie ermöglicht keine Aussagen darüber, wie die notwendige Leistung (Drehmoment, Drehzahl) zugeführt werden muss und wie sie durch die Blätter umgesetzt wird. Dies wird erst durch die viel aufwändigere Blattelement-Theorie möglich.

Spezifischer Schub (engl. Power Loading)

Der pro Watt Leistung erzeugte Schub ist eine anschauliche Maßzahl für die Eignung eines Rotors zur Schuberzeugung. Aus (21) ergibt sich durch Umstellen

$$\boxed{S_{spez,id} = \left(S/P\right)_{ideal} = \sqrt{2\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{1}{S/F}}} \qquad (22)$$

Darin ist S/F wieder die Strahlflächenbelastung. Wie aus (22) zu sehen, sollte sie möglichst nieder sein, wenn bei gegebener Antriebsleistung eine hoher Schub gefordert wird.
In Bild 3 (folgender Abschnitt) stellt Formel (22) die am weitesten oben liegende Kurve (FM = 1) dar.

Der reale Propeller

Ein realer Propeller braucht für den gleichen Schub stets eine höhere Antriebsleistung als der ideale. Man führt deshalb einen sog. Gütegrad ζ (zeta, griechischer Buchstabe) oder englisch „Figure of Merit" (FM) ein. Nachfolgend wird die englische Bezeichnung verwendet.

***FM* ist die „Maßzahl" dafür, wie nahe ein Propeller dem theoretischen Ideal kommt; also kein Wirkungsgrad im engeren Sinn. *FM* ist definiert als das Verhältnis von idealer zu real notwendiger (Wellen-)Leistung:**

$$FM = \frac{P_{id}}{P_w} \qquad (23)$$

Die im Modellflug vorkommenden FM-Werte liegen ungefähr im Bereich 0,40 bis 0,65.
Sind Schub und Wellenleistung bekannt (z. B. P_w durch Messung von Drehmoment und Drehzahl bei einem bestimmten gemessenen Schub), dann kann FM nach Formel (22) berechnet werden.

Umgekehrt wird bei bekanntem FM (aus einer Propellermessung) die erforderliche Wellenleistung

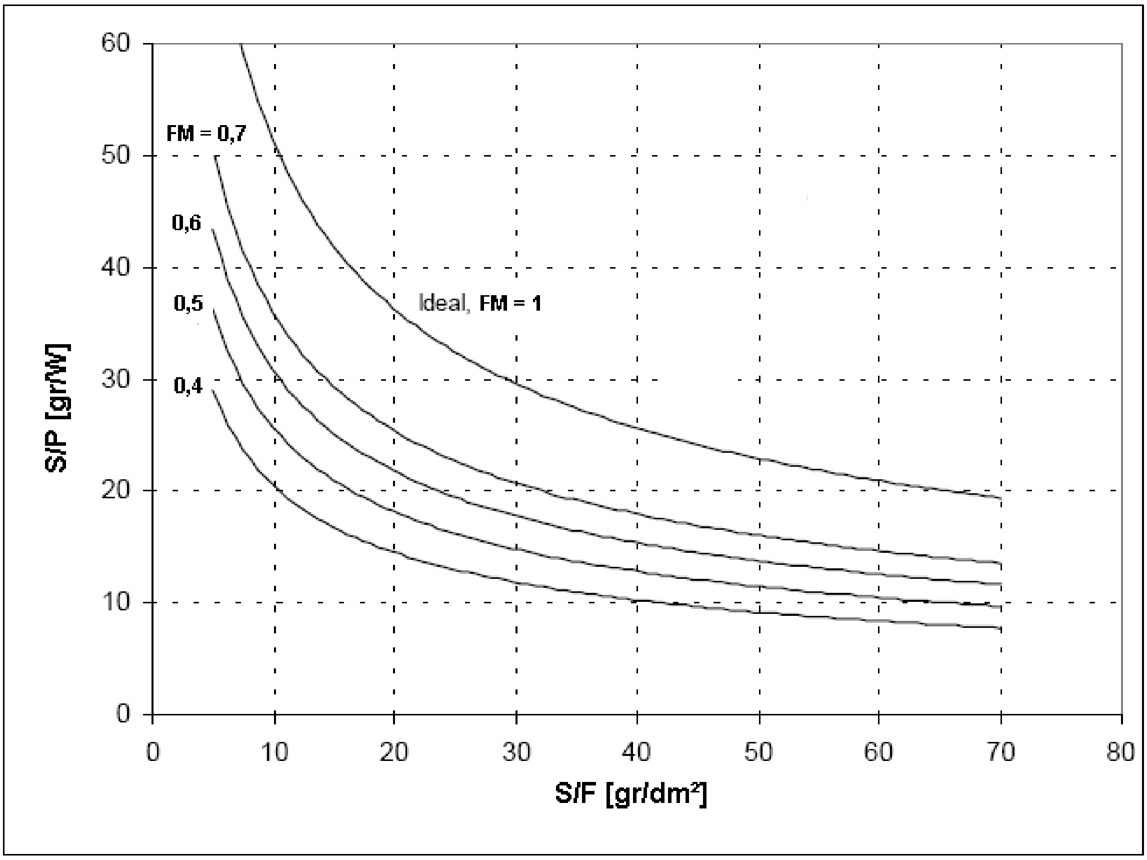
$$P_w = \frac{P_{id}}{FM} = \frac{1}{FM}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\cdot\rho}}\cdot\sqrt{\frac{S^3}{F}} \qquad (24)$$

Ebenso wie oben in Gleichung (22) für den idealen Propeller kann man auch für den realen Propeller einen spezifischen Schub als Kennwert definieren.

Es wird dann

$$S_{spez,reall} = \left(S/_{P_w} \right)_{real} = FM \cdot \sqrt{2 \cdot \rho} \cdot \sqrt{\frac{1}{S/_F}} \qquad (24)$$

Im nachstehenden Bild 3 ist nach /2/ der spezifische Schub über der Kreisflächenbelastung S / F aufgetragen, mit FM als Parameter.



„Über Alles“-Kennwerte

Es kommt häufig vor, dass keine Messeinrichtungen für die Wellenleistung P_w vorhanden oder keine Daten des Motors bekannt sind; in diesem Fall kann die Gütezahl des Propellers nicht bestimmt werden.

Man kann jedoch einen „Über Alles“-oder „Gesamt“-Gütegrad definieren, indem statt der Wellenleistung die Eingangsleistung des Elektromotors verwendet wird:

$$\boxed{FM_{ges} = \frac{P_{id}}{P_{el}}} \qquad (25)$$

Die Eingangsleistung P_{el} des Motors kann relativ einfach durch Strom- und Spannungsmessung bestimmt werden.
Mit dem Motorwirkungsgrad η_{mot} ist die Wellenleistung

$$P_w = \eta_{mot} \cdot P_{el} \quad \text{bzw.} \quad P_{el} = \frac{P_w}{\eta_{mot}} \qquad (26)$$

und es ist $$P_{id} = FM \cdot \eta_{mot} \cdot P_{el} \quad (27)$$

und $$\boxed{FM_{ges} = FM \cdot \eta_{mot}} \quad (28)$$

FM

FM_{ges} eignet sich gut zur Bewertung einer Motor/Propeller-Kombination.
Leider ist es nicht möglich, darin die Faktoren FM und η_{mot} einzeln zu bestimmen. Man weiß also z. B. nicht, welcher Faktor dafür verantwortlich ist, wenn eine Motor/Propeller-Kombination besonders gut oder schlecht ist.

Für den spezifischen Schub kann man ebenfalls einen „Über Alles“-Wert definieren:

$$\boxed{S_{spez,ges} = \frac{S}{P_{el}}} \quad (29)$$

Der spezifische Schub nach Formel 29 ergibt sich einfach aus den Messwerten von Schub und elektrischer Leistung. Er ist für die Praxis der wichtigste und anschaulichste Kennwert einer Motor/Propeller-Kombination.

Zwischen $S_{spez,ges}$ und FM_{ges} besteht der Zusammenhang

$$S_{spez,ges} = \frac{S}{P_{id}} \cdot FM_{ges} \quad (30)$$

Literatur:

/1/ *Walter Bittner*, Flugmechanik der Hubschrauber, Springer-Verlag 2009

/2/ *Helmut Schenk*, Der Standschub von Propellern und Rotoren
http://www.rc-network.de/magazin/artikel_02/art_02-0037/art_02-0037-00.html

/3/ R.W. Prouty, Helicopter Performance, Stability and Control
PWS Engineering Boston, 1986

/4/ J.G. Leishman, Helicopter Aerodynamics, Cambridge University Press, 2006

/5/ W. Johnson, Helicopter Theory, Dover Publications, 1994

Liste der verwendeten Größen

Symbol	Einheit	Bedeutung, Bemerkung
D	m	Durchmesser Propeller/Rotor
F	m²	Flächeninhalt Propeller/Rotor
F_3	m²	Flächeninhalt des voll entwickelten Strahls
FM	---	Gütegrad (Figure of Merit), realer Propeller/Rotor
FM_{ges}	---	Gütegrad einschließlich Motor, "über alles"
$\dot{m}$	kg/s	Massenstrom (sprich „m-Punkt")
p_0	N/m²	(Statischer) Umgebungsdruck, 1N/m² = 1 Pa
p_1	N/m²	Statischer Druck unmittelbar vor Propellerebene
p_2	N/m²	Statischer Duck unmittelbar nach Propellerebene
Δp	N/m²	Differenzdruck $p_2 - p_1$
P_{el}	W	Eingangsleistung des (Elektro-)Motors
P_i	W	Induzierte Leistung in Propellerebene, allgemein
P_{ideal}	W	Induzierte Leistung in Propellerebene, Idealpropeller
P_{Str}	W	Leistung im vollentwickelten Propellerstrahl
P_w	W	Wellenleistung, allgemein
$P_{w,id}$	W	Ideale (Mindest-) Wellenleistung
S	N oder gr („Kraft")	Propeller-/Rotorschub Umrechnung: 1 N = 102 gr
S / F	N/m² oder gr/dm²	Kreisflächenbelastung des Propellers/Rotors Umrechnung: 1 N/m² = 1 gr/dm²
S_{spez}	N/W oder gr/W	Spezifischer Schub des Propellers, allgemein Umrechnung: 1N/W = 102 gr/W
$S_{spez,id}$	N/W oder gr/W	Spezifischer Schub des Idealpropellers
$S_{spez,real}$	N/W oder gr/W	Spezifischer Schub des realen Propellers, ohne Motorwirkungsgrad
$S_{spez,ges}$	N/W oder gr/W	Spezifischer Schub des realen Propellers, einschließlich Motorwirkungsgrad
v_i	m/s	Induzierte Geschwindigkeit in Propellerebene
v_3	m/s	Geschwindigkeit des voll entwickelten Strahls
η_{mot}	---	Motor-Wirkungsgrad
ρ	kg/m³	Luftdichte, meistens 1,22 kg/m³